

Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 14


**Miara produktowa
i całka iterowana**

Niech $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ przestrzenie z miarami σ -skończonymi. Skonstruujemy **produktową przestrzeń z miarą σ -skończoną**

$$(X \times Y, \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y, \mu_X \otimes \mu_Y)$$

Lem. Iloczyn kartezjański σ -algebr jest półpierścieniem, tzn.

$\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y := \{A \times B : A \in \mathcal{F}_X, B \in \mathcal{F}_Y\}$ jest półpierścieniem zbiorów.

Dowód: 

Def. σ -algebrę $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y := \sigma(\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ generowaną przez $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ nazywamy **σ -algebrą produktową** lub **iloczynem σ -algebr $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$** .

Prz. Rodzina $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ składa się z „prostokątów” na \mathbb{R}^2 , a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ zawiera wszystkie zbiory borelowskie na \mathbb{R}^2 .

Tw. Istnieje dokładnie jedna miara $\mu_X \otimes \mu_Y : \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y \rightarrow [0, \infty]$ t., że

$$\forall A \in \mathcal{F}_X, B \in \mathcal{F}_Y \quad \mu_X \otimes \mu_Y(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B). \quad (\dagger)$$

Dowód: Na mocy Twierdzeń o przedłużeniu i jednoznaczności miar wystarczy pokazać, że funkcja $\mu_X \otimes \mu_Y : \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y \rightarrow [0, \infty]$ dana wzorem (\dagger) jest σ -addytywna. (Idea: zapiszemy $\mu_X \otimes \mu_Y$ jako całkę po μ_X)

Dla $C = A \times B \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ połóżmy $f_C := \mathbb{1}_A \cdot \mu_Y(B)$. Wtedy

$$\int_X f_C(x) d\mu_X = \int_X \mathbb{1}_A \cdot \mu_Y(B) d\mu_X = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B) = \mu_X \otimes \mu_Y(C).$$

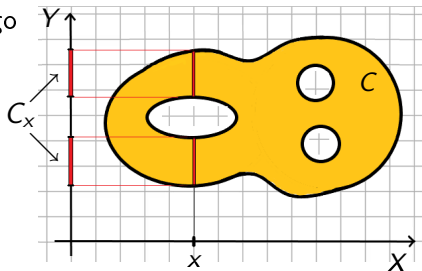
Dla poręczniejszego zapisu, dla każdego

$x \in X$ oraz każdego $C \subseteq X \times Y$

rozważmy **x -przekrój zbioru C** :

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$$

zbiór y -ków leżących w C nad x



Jeśli $C = A \times B$, to $C_x = B$, gdy $x \in A$ oraz $C_x = \emptyset$, gdy $x \notin A$. Stąd

$$f_C(x) = \mu_Y(C_x)$$

Założmy, że $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$, gdzie $C_n \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$. Wtedy

$C_x = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{n,x}$, gdzie $C_{n,x}$ jest x -przekrojem zbioru C_n , $x \in X$.

Z σ -addytywności μ_Y i całkowalności szeregów wyraz po wyrazie

$$\begin{aligned} \mu_X \otimes \mu_Y(C) &= \int_X f_C(x) d\mu_X = \int_X \mu_Y(C_x) d\mu_X = \int_X \mu_Y\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_{n,x}\right) d\mu_X \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \mu_Y(C_{n,x}) d\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mu_Y(C_{n,x}) d\mu_X \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_{C_n}(x) d\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_X \otimes \mu_Y(C_n). \end{aligned}$$

Def. Miarę $\mu_X \otimes \mu_Y$ na $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$ spełniającą (\dagger) nazywamy **miarą produktową**, lub też **iloczynem miar** μ_X i μ_Y .

Uw. Produktowanie miar jest łączne, tzn.

$$(\mu_X \otimes \mu_Y) \otimes \mu_Z = \mu_X \otimes (\mu_Y \otimes \mu_Z)$$

dla dowolnych σ -skończonych miar μ_X, μ_Y, μ_Z . 🏠 Zatem w tym kontekście możemy i będziemy pomijać pisanie nawiasów.

Prz. Potęgi jednowymiarowej miary Lebesgue'a λ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (długości na prostej \mathbb{R}) są n -wymiarowymi Lebesgue'a λ^n na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda^{\otimes n} := \underbrace{\lambda \otimes \lambda \otimes \dots \otimes \lambda}_{n\text{-razy}} = \lambda^n$$

Prz. Zmienne losowe ξ, ζ na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) są **niezależne** \iff rozkład wektora losowego (ξ, ζ) jest iloczynem rozkładów ξ i ζ , czyli


$$\mu_{(\xi, \zeta)} = \mu_\xi \otimes \mu_\zeta$$

gdzie $\mu_{(\xi, \zeta)}(C) := P(\{\omega \in \Omega : (\xi(\omega), \zeta(\omega)) \in C\})$ dla $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.



Lem. Niech $C \in \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$. Wtedy

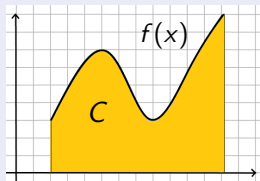
- 1 przekrój $C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ należy do \mathcal{F}_Y dla μ_X -prawie każdego $x \in X$. W szczególności, funkcja $f_C(x) = \mu_Y(C_x)$ jest μ_X -prawie wszędzie określona i jest ona mierzalna.
- 2 Zachodzi równość: $\mu_X \otimes \mu_Y(C) = \int_X f_C(x) d\mu_X$

Dowód: Gdy $C = A \times B$ to już widzieliśmy w dowodzie **Tw.** Ogólnie 

Wn. Jeżeli $f \geq 0$ funkcja mierzalna na X oraz

$C := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}$, to

$$\mu_X \otimes \lambda(C) = \int_X f(x) d\mu_X$$



Dowód: Stosujemy **Lem** dla $\mu_Y = \lambda$. Wtedy $C_x = [0, f(x)]$. Zatem $f_C(x) = \lambda(C_x) = \lambda([0, f(x)]) = f(x)$. Czyli teza wynika z **Lem** (2). ■

Pytanie:

Kiedy całkę podwójną można liczyć jako całkę iterowaną?



Twierdzenie Tonellego.

Dla dowolnej $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$ -mierzalnej funkcji $f(x, y) \geq 0$

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_X \otimes \mu_Y = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y d\mu_X = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu_X d\mu_Y$$

W szczególności, $\int_Y f(x, y) d\mu_Y$ jako funkcja od x jest \mathcal{F}_X -mierzalna oraz $\int_X f(x, y) d\mu_X$ jako funkcja od y jest \mathcal{F}_Y -mierzalna.

Dowód: Niech $C := \{(x, y, t) \in X \times Y \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x, y)\}$. Z **Wn**

$$\mu_X \otimes \mu_Y \otimes \lambda(C) = \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_X \otimes \mu_Y.$$

Na mocy **Lem** dla μ_X -prawie każdego $x \in X$ przekrój

$$C_x = \{(y, t) : (x, y, t) \in C\} = \{(y, t) \in Y \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x, y)\}$$

jest w $\mathcal{F}_Y \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dla $f_C(x) := \mu_Y \otimes \lambda(C_x) \stackrel{\text{Wn}}{=} \int_Y f(x, y) d\mu_Y$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_X \otimes \mu_Y &\stackrel{\text{Wn}}{=} \mu_X \otimes \mu_Y \otimes \lambda(C) \stackrel{\text{Lem}}{=} \int_X f_C(x) d\mu_X \\ &= \int_X \mu_Y \otimes \lambda(C_x) d\mu_X \stackrel{\text{Wn}}{=} \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y d\mu_X. \end{aligned}$$

Dowodzi to pierwszej równości w tezie. Drugiej dowodzi się podobnie. 6/8

Twierdzenie Fubiniego.



Dla dowolnej $\mu_X \otimes \mu_Y$ -całkowalnej funkcji $f(x, y)$

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_X \otimes \mu_Y = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y d\mu_X = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu_X d\mu_Y$$

W szczególności, $\int_Y f(x, y) d\mu_Y$ jako funkcja od x jest μ_X -całkowalna oraz $\int_X f(x, y) d\mu_X$ jako funkcja od y jest μ_Y -całkowalna.

Dowód: Wniosek z Twierdzenia Tonellego poprzez zastosowanie go do części dodatniej $f^+(x, y)$ oraz części ujemnej $f^-(x, y)$ funkcji $f(x, y)$. 🏠

Uw. Na ogół, z istnienia całek iterowanych nie wynika ich równość, a z ich równości i skończoności nie wynika całkowalność funkcji.

Prz1. Niech $X = Y = [-1, 1]$, $\mu_X = \mu_Y = \lambda$ oraz $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$. Skoro $f(x, y)$ nieparzysta ze względu na x i y , to $\int_{-1}^1 f(x, y) dx = \int_{-1}^1 f(x, y) dy = 0$. Zatem

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dy dx = 0.$$

Z drugiej strony $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ nie jest całkowalna na $X \times Y$:

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]^2} |f(x, y)| d\lambda^2 &\geq \iint_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq 1\}} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2} d\lambda^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{współrzędne biegunowe} \\ x = r \sin \varphi, \quad y = r \cos \varphi \end{array} \right\} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^2 |\cos \varphi \sin \varphi|}{(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2} r d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi dr \\ &= \int_0^{2\pi} |\cos \varphi \sin \varphi| d\varphi \cdot \int_0^1 \frac{1}{r} dr = \infty. \end{aligned}$$

Prz2. Niech $X = Y = [0, 1]$ oraz $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Wtedy

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy = \int_0^1 \partial_y \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2+1}$$

a stąd

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = [\arctg(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Z drugiej strony, skoro $f(x, y) = -f(y, x)$, to mamy

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy dx = - \frac{\pi}{4}.$$

GOOD LUCK



WIESZ UMIESZ ...



POWODZENIA NA EGZAMINIE